Chapitre 29

Matrices et applications linéaires

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On considère $n, m, p \in \mathbb{N}^*$.
E, F, G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels **de dimension finie.**

Remarque (Identification $\mathbb{K}^n$–$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on identifiera $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Un vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ peut donc s'écrire de deux manières :

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \underset{\text{identification}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(x)$$

avec $\mathcal{B}_c$ la base **canonique** de $\mathbb{K}^n$
(Cf ci-dessous pour la définition de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(x)$)

Ne pas confondre $x = (x_1, \cdots, x_n)$ avec la matrice ligne $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$, où il n'y a pas de virgule.

1 Matrice associée à un morphisme

1.1 Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs

Définition 29.1 (Matrice d'un vecteur)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E (sous-entendu $\dim E = n$). Soit $x \in E$ qui s'écrit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ dans la base $\mathcal{B}$. On appelle matrice de x dans la base $\mathcal{B}$, la matrice colonne notée

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Autrement dit, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est la matrice colonne constituée des coordonnées de x selon la base $\mathcal{B}$.

Remarque. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est très simple si $E = \mathbb{R}^n$ et si $\mathcal{B}$ est la base canonique.

Exemple 1. Soit $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On cherche la matrice de x dans la base canonique $\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On cherche les coordonnées de x selon la base $\mathcal{B}_c$:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(x) =$$

Exemple 2. Donner la matrice du vecteur $x = (2,3) \in \mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$ puis dans la base $\mathcal{B}' = ((1,-1),(1,1))$.

On cherche les coordonnées de x selon $\mathcal{B}$:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) =$$

puis selon $\mathcal{B}'$:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) =$$

Définition 29.2 (Matrice d'une famille de vecteurs)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, et $(c_1, \cdots, c_m)$ une famille quelconque de vecteurs de E. On appelle matrice de $(c_1, \cdots, c_m)$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice dont la j-ième colonne est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_j)$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_1, \cdots, c_m) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_1) & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_2) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i, j) de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_1, \cdots, c_m)$ est le i-ième coefficient de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_j)$. C'est donc l'unique scalaire $a_{ij} \in \mathbb{K}$ tel que

$$c_j = (\cdots)e_1 + \ldots + a_{ij}e_i + \ldots + (\cdots)e_n$$

Exemple 3. Dans $\mathbb{R}^3$, la matrice de la famille $\mathcal{F} = ((1,4,8), (-3,5,3), (6,-6,2))$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F}) =$$

1.2 Matrice d'une application linéaire

Rappel : si $\mathcal{C} = (c_1, \cdots, c_m)$ est une famille quelconque de vecteurs de E, on note

$$u(\mathcal{C}) := (u(c_1), \cdots, u(c_m))$$

Définition 29.3 (Matrice d'une application linéaire)

Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, et $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_p)$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice de $u(\mathcal{B}_E)$ dans la base $\mathcal{B}_F$, notée

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(\mathcal{B}_E)) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), \cdots, u(e_n)) \\ &= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1)) & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_2)) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_n)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

Remarque. Moyen mnémotechnique : lorsqu'on écrit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$, il faut se dire que la base $\mathcal{B}_F$ est "à gauche" et la famille $u(\mathcal{B}_E)$ est "en haut". Notamment :

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ a autant de lignes que le cardinal de $\mathcal{B}_F$, ici p.
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ a autant de colonnes que le cardinal de $\mathcal{B}_E$ ou de $u(\mathcal{B}_E)$, ici n.

Ainsi, si $u : \mathbb{R}^{\boxed{n}} \to \mathbb{R}^{\boxed{p}}$ est linéaire, sa matrice dans des bases quelconques sera une matrice de $\mathcal{M}_{\boxed{p,n}}(\mathbb{K})$.

Méthode (Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$)

Pour déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$, on identifie soigneusement la base de départ $\mathcal{B}_E$ et la base d'arrivée $\mathcal{B}_F$.

Si on note $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$, il faut ensuite déterminer les coordonnées de chaque vecteur $u(e_j)$ selon la base d'arrivée $\mathcal{B}_F$ (ce qui conduit en général à résoudre un système dont les coordonnées sont les inconnues).

Une fois les coordonnées de $u(e_j)$ calculées, on les reporte dans la colonne numéro j de la matrice.

Exemple 4. On considère $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $u(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+5y+2z \\ -x+15z \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}_c}(u)$, où $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Remarque. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ est très simple si $F = \mathbb{R}^p$ et si la $\mathcal{B}_F$ est la base canonique. Il suffit de reporter le vecteur $u(e_j)$ directement dans la j-ième colonne.

Exemple 5. On considère $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$ définie par par $u(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+5y \\ -x+15y \\ ex-\pi y \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}{}^{\mathcal{B}}(u)$, avec $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4i \end{pmatrix} \right)$ (qui est une base de $\mathbb{C}^2$) et $\mathcal{B}_c$ la base canonique (de $\mathbb{C}^3$).

Définition 29.4 (Matrice d'un endomorphisme dans une base)

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$$

Avec $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, on a donc $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1), \cdots, u(e_n)) \quad$, i.e. :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1)) & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_2)) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_n)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Exemple 6. Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, la matrice de id_E dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\qquad) & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\qquad) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\qquad) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) =$

Exemple 7. On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$ avec pour base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(P) = P'$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Propriété 29.5 (Calcul de $u(x)$ avec des matrices)

Soit $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ des bases respectives de E, F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

Exemple 8. Si on reprend l'exemple précédent, prenons $P = X^3 + 2X^2 + 1$ et calculons sa dérivée par la méthode matricielle (ici $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F = \mathcal{B}$) :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(P)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P)$$

1.3 Opérations avec les matrices associées

Théorème 29.6 (Matrice de $u+v$, de λu)

On suppose que $\dim E = n$ et $\dim F = p$, avec $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ des bases respectives de E, F. Alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E,F) &\to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ u &\mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) \end{aligned}$$

est un **isomorphisme** d'e.v.

En particulier, pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) + \beta \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(v)$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(\lambda u) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(v) \iff u = v$$

Remarque. À noter que l'application Φ dépend du choix des bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$. Il faut donc absolument que ce soient les mêmes bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ qui apparaissent à chaque "Mat" ci-dessus.

Remarque. Le théorème (re)démontre en particulier que $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie avec

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) = np = \dim E \times \dim F$$

Théorème 29.7 (Matrice de $v \circ u$)

Soit $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases respectives de E, F, G. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_G}{}^{\mathcal{B}_E}(v \circ u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_G}{}^{\mathcal{B}_F}(v) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$$

Théorème 29.8 (Matrice de u^{-1})

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est inversible.
2. Il existe une base $\mathcal{B}_E$ de E et une base $\mathcal{B}_F$ de F telles que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ soit inversible.
3. Pour toute base $\mathcal{B}_E$ de E et pour toute base $\mathcal{B}_F$ de F, la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ est inversible.

De plus lorsque ces assertions sont vérifiées, on a pour toutes bases $\mathcal{B}_E$ de E et $\mathcal{B}_F$ de F :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}{}^{\mathcal{B}_F}(u^{-1}) = \left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)\right)^{-1}$$

Démonstration. Comme u est un isomorphisme, E et F ont même dimension et on peut poser $n = \dim E = \dim F$. De plus, par le théorème précédent, on a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}{}^{\mathcal{B}_F}(u^{-1}) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}{}^{\mathcal{B}_E}(u^{-1} \circ u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E) = I_n$$

De même, on montre que

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}{}^{\mathcal{B}_F}(u^{-1}) = I_n$$

donc $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ est inversible d'inverse $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}{}^{\mathcal{B}_F}(u^{-1})$. □

1.4 Reformulation pour les endomorphismes

On reformule les résultats obtenus en section 1.3 dans le cas $E = F$: dans ce cas on prend quasi-systématiquement la même base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. Soit donc $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. On note

$$U := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \qquad V := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \qquad X := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\boxed{u(x)}) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \boxed{UX}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \qquad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\boxed{\alpha u + \beta v}) = \alpha \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) + \beta \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \boxed{\alpha U + \beta V}$$

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\boxed{v \circ u}) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v)\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \boxed{VU}$$

$u \in GL(E)$ ssi $U \in GL_n(\mathbb{R})$ et alors :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\boxed{u^{-1}}) = (\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^{-1} = \boxed{U^{-1}}$$

2 Morphisme canoniquement associé à une matrice

On a vu que, partant d'une application linéaire $u : E \to F$, on peut lui associer une (unique) matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ à condition de fixer des bases de départ et d'arrivée. On va faire l'opération inverse : partant d'une matrice, on va lui associer une application linéaire.

Définition 29.9

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On appelle morphisme canoniquement associé à A l'unique application linéaire $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_p}{}^{\mathcal{B}_n}(u_A)$$

où $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_p$ sont les bases **canoniques** respectives de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. *(notation non officielle pour $\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_p$)*

Remarque (Calcul de $u_A(x)$)**.** Soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $y = u_A(x) = (y_1, \cdots, y_p) \in \mathbb{K}^p$. Pour calculer y, on peut remarquer que, par l'identification entre vecteur de $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$u_A(x) = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_p}(y) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_p}(u_A(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_p}{}^{\mathcal{B}_n}(u_A)\text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(x) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En d'autres termes, en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(x)$, on a $\boxed{\begin{array}{rl} u_A : \mathbb{K}^n & \to \mathbb{K}^p \\ X & \mapsto AX \end{array}}$

Définition 29.10

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ son morphisme associé. On définit

- Le noyau de A par $\text{Ker}\, A := \text{Ker}\,(u_A)$ (c'est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).
- L'image de A par $\text{Im}\, A := \text{Im}\,(u_A)$ (c'est un s.e.v. de $\mathbb{K}^p = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$).
- Le rang de A par $\text{rg}\, A := \text{rg}\, u_A = \dim(\text{Im}\, u_A) = \dim(\text{Im}\, A)$.

Propriété 29.11 (Caractérisations de Ker A et Im A)

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $X \in \mathbb{K}^n$ et $Y \in \mathbb{K}^p$.

$$X \in \text{Ker}\, A \iff AX = 0$$

$$Y \in \text{Im}\, A \iff \exists X \in \mathbb{K}^n \quad AX = Y$$

Propriété 29.12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Alors

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \text{Ker}\, A = \{0\} \iff \text{Im}\, A = \mathbb{K}^n \iff \text{rg}\, A = n$$

Démonstration. Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, son morphisme associé est un endomorphisme : $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. D'une part, on a vu en section 1.4 que $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $u_A \in GL(\mathbb{K}^n)$.
D'autre part, comme $u_A : \mathbb{K}^n \to \boxed{\mathbb{K}^n}$, les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont égales. Alors, on a vu au chapitre précédent que :

$$u_A \text{ est inversible} \iff \underbrace{\operatorname{Ker} u_A}_{=\operatorname{Ker} A} = \{0\} \iff \underbrace{\operatorname{Im} u_A}_{=\operatorname{Im} A} = \boxed{\mathbb{K}^n} \iff \underbrace{\operatorname{rg} u_A}_{=\operatorname{rg} A} = \dim \boxed{\mathbb{K}^n} = n$$

□

3 Retour sur les systèmes linéaires

Soit $B \in \mathbb{K}^p$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On considère un système linéaire sous écriture matricielle :

$$(\mathcal{S}) : \quad AX = B \qquad \text{d'inconnue } X \in \mathbb{K}^n$$

ainsi que le système linéaire homogène associé :

$$(\mathcal{S}_0) : \quad AX = 0_{\mathbb{K}^p} \qquad \text{d'inconnue } X \in \mathbb{K}^n$$

Enfin, on note $\mathbf{S}$ et $\mathbf{S_0}$ les ensembles de solutions de $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$ respectivement.

3.1 Cas général

Tout découle de la Proposition 29.11 :

- Les solutions du système $(\mathcal{S}_0)$ sont exactement les vecteurs du noyau de A :
$$\mathbf{S_0} = \operatorname{Ker} A$$
- Le système $(\mathcal{S})$ est compatible (i.e. admet une solution) si et seulement si B est dans l'image de A :
$$\mathbf{S} \neq \varnothing \iff B \in \operatorname{Im} A$$
- Lorsque $B \in \operatorname{Im} A$, étant donné $X_{part} \in \mathbf{S}$ une solution particulière quelconque de $(\mathcal{S})$, on a
$$\mathbf{S} = X_{part} + \mathbf{S_0} = \{X_{part} + X_H \mid X_H \in \mathbf{S_0}\}$$
$$X \in \mathbf{S} \iff \exists X_H \in \mathbf{S_0} \quad X = X_{part} + X_H$$

On remarquera que $\mathbf{S_0}$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. Si $\mathbf{S_0} = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, on a $\mathbf{S} = \varnothing$ (si $B \notin \operatorname{Im} A$) ou $\mathbf{S} = \{X_{part}\}$ (si $B \in \operatorname{Im} A$). Autrement dit, si $\mathbf{S_0} = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, il y a unicité de la solution (mais pas forcément existence).

3.2 Cas particulier : $p = n$ et A inversible

Propriété 29.13

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée inversible, on dit que $AX = B$ est un système de Cramer.
Il y a alors existence et unicité de la solution : elle est donnée par $X = A^{-1}B$.

Démonstration. Immédiat, mais voici un éclairage intéressant de ce qui précède. Comme A est inversible, on a :

- $\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n$, donc on a toujours $B \in \operatorname{Im} A$. Donc $\mathbf{S} \neq \varnothing$: il existe une solution et on a $\mathbf{S} = X_{part} + \mathbf{S_0}$.
- $\operatorname{Ker} A = \mathbf{S_0} = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Ainsi, $\mathbf{S} = X_{part} + \{0_{\mathbb{K}^n}\} = \{X_{part}\}$. La solution (qui existe), est unique.

Ainsi, il y a existence et unicité de la solution de $AX = B$. On remarque que $X = A^{-1}B$ convient. □

3.3 Utilisation de systèmes linéaires pour trouver noyau et image

Dans ce qui suit on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$.

Méthode (Passer par la matrice de u pour déterminer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Pour déterminer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$, on peut procéder ainsi :

1. On détermine la matrice $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_p}{}^{\mathcal{B}_n}(u)$ avec $\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_p$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ (donc $u = u_A$). Quand les bases de départ et d'arrivée sont canoniques, ce passage est très facile, cf exemple ci-dessous.
   (a) $(x_1, \cdots, x_n) \in \operatorname{Ker} A$ ssi $AX = 0_{\mathbb{K}^p}$ donc ssi $(x_1, \cdots, x_n)$ est solution du système linéaire
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \end{array}\right)$$
   On le résout pour trouver $\operatorname{Ker} A$, donc $\operatorname{Ker} u$.
   (b) $(y_1, \cdots, y_p) \in \operatorname{Im} A$ ssi $\exists X \in \mathbb{K}^p\ AX = Y$ donc ssi il existe une solution au système linéaire
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & y_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & y_p \end{array}\right)$$
   On détermine les éventuelles équations de compatibilités sur $y_1, \cdots, y_p$. L'ensemble $\operatorname{Im} A$ (donc $\operatorname{Im} u$) correspond à l'ensemble des vecteurs $(y_1, \cdots, y_p)$ qui satisfont toutes les équations de compatibilités. S'il n'y en a pas, alors $\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^p$.

Exemple 9. Déterminer le noyau et l'image de $u(x, y, z) = (2x - y - 2z,\ y,\ x - y - z)$.

4 Changements de base

On a vu aux exemples 2 et 4 qu'il n'est pas facile d'écrire la matrice d'un vecteur ou d'une application linéaire lorsque la base d'arrivée n'est pas canonique. On est souvent amené à résoudre des systèmes linéaires. On va voir ici une méthode qui réduira le problème à un simple produit matriciel.

4.1 Matrices de passage

Définition 29.14

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice notée

$$P_{\mathcal{B}}^{\ \mathcal{B}'} := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\ \mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

Si $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$, on a donc

$$P_{\mathcal{B}}^{\ \mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \cdots, e'_n)$$

Attention à l'ordre !! La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

Remarque. La matrice de passage d'une base canonique $\mathcal{B}_c$ à une base quelconque $\mathcal{B}$, càd $P_{\mathcal{B}_c}{}^{\mathcal{B}}$ est très facile à calculer (car la base $\mathcal{B}_c$ est "à l'arrivée") :

Exemple 10. On pose $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B}_c$ la base canonique. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$.

À noter : une matrice de passage est toujours carrée. Si on note $n = \dim E$, alors $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété 29.15

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, et $n = \dim E$. La matrice $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$ est toujours inversible et

$$\left(P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}$$

Démonstration. On sait que l'application id_E est bijective et est sa propre inverse. Ainsi, on a vu que $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$ est inversible et $\left(P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}((\mathrm{id}_E)^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = P_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}$. $\square$

Exemple 11. (suite de l'exemple précédent) Calculer $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}_c}$.

4.2 Changements de base

Propriété 29.16 (Changement de base pour un vecteur)

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}}^{\ \ \mathcal{B}'}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$$

Dit autrement, avec $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x), \quad X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x), \quad$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\ \ \mathcal{B}'}$, alors

$$X = PX'$$

Autrement dit, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ permet de passer des coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$... à celles dans $\mathcal{B}$ (!). La terminologie est très, très contre-intuitive, attention à ne pas se tromper !

Exemple 12. Soit $\mathcal{B} = ((1,2,3),(2,3,4),(3,4,4))$. Déterminer la matrice du vecteur $x = (1,-1,0)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété 29.17 (Changement de bases pour un morphisme)

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}^{\ \ \mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{C}'}^{\ \ \mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}^{\ \ \mathcal{B}}(u)\,P_{\mathcal{B}}^{\ \ \mathcal{B}'}$$

Si on pose $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}^{\ \ \mathcal{B}'}(u)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}^{\ \ \mathcal{B}}(u)$, $P = P_{\mathcal{B}}^{\ \ \mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}'}^{\ \ \mathcal{C}}$, cette relation se réécrit

$$A' = QAP$$

Propriété 29.18 (Changement de base pour un endomorphisme)

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}^{\ \ \mathcal{B}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\,P_{\mathcal{B}}^{\ \ \mathcal{B}'}$$

Si on pose $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\ \ \mathcal{B}'}$, cette relation se réécrit

$$A' = P^{-1}AP$$

Exemple 13. On considère $\mathcal{B} = ((1,2,3),(2,3,4),(3,4,4))$, et $u(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x+4y+4z \\ -6x-7y-8z \\ 3x+4y+5z \end{pmatrix}$

Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. En déduire que u est un projecteur, et déterminer ses éléments caractéristiques (i.e. $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$, qui sont donc supplémentaires). Donner également une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.

4.3 Matrices équivalentes et opérations élémentaires

Définition 29.19 (Matrices équivalentes)

Soit $A, A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On dit que A' est équivalente à A s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que

$$A' = QAP$$

Voici une définition équivalente : A' est équivalente à A s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que

$$A' = Q^{-1}AP$$

Remarque. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et A, A' deux matrices qui représentent u dans des bases différentes (par exemple $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}{}^{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{B}'}(u)$). Alors A et A' sont équivalentes, cf Proposition 29.17.

Propriété 29.20

La relation "être équivalente à" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

On pourra en particulier dire que deux matrices sont équivalentes si l'une est équivalente à l'autre.

Définition 29.21 (Matrices de dilatation)

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle <u>matrice de dilatation</u> toute matrice de la forme

$$D_i(\mu) := \begin{array}{cc} & \\ \text{ligne } i & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \mu & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \text{col. } i \end{array} \qquad \text{avec } \mu \in \mathbb{K}^*$$

On peut vérifier que $D_i(\mu)$ est inversible avec $D_i(\mu)^{-1} = D_i\left(\dfrac{1}{\mu}\right)$.

Définition 29.22 (Matrice de permutation)

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle <u>matrice de permutation</u> toute matrice de la forme

$$P_{i,j} := \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \\ \\ \text{ligne } j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \text{col. } i \qquad\qquad \text{col. } j \end{array} \qquad \text{avec } i \neq j$$

On peut vérifier que $P_{i,j}$ est inversible avec $(P_{i,j})^{-1} = P_{i,j}$.

Définition 29.23

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle matrice de transvection toute matrice de la forme

$$T_{i,j}(\lambda) := \begin{array}{r} \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \text{ligne } j \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K}) \qquad \text{avec } i \neq j \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{col. } i & & \text{col. } j & & \end{array}$$

On peut vérifier que $T_{i,j}(\lambda)$ est inversible avec $\quad T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

Lemme 29.24 (Op. élémentaires et matrices équivalentes)

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

- Une opération élémentaire sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par une matrice :

Opération élémentaire sur A	Écriture matricielle
$L_i \leftarrow \mu L_i$	$D_i(\mu) \times A$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$P_{i,j} \times A$
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$T_{i,j}(\lambda) \times A$

- Une opération élémentaire sur les colonnes de A revient à multiplier A à droite par une matrice :

Opération élémentaire sur A	Écriture matricielle
$C_i \leftarrow \mu C_i$	$A \times D_i(\mu)$
$C_i \leftrightarrow C_j$	$A \times P_{i,j}$
$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$A \times T_{i,j}(\lambda)$

Propriété 29.25

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Si B est une matrice obtenue à partir d'opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes de A, alors les matrices A et B sont équivalentes.

Démonstration. Supposons que B soit obtenue à partir de A en ayant fait :

- r opérations sur les lignes dont on note $L_1, \cdots, L_r$ les matrices associées (à l'opération n°1, n°2, ..., n°r).
- s opérations sur les colonnes dont on note $C_1, \cdots, C_s$ les matrices associées (à l'opération n°1, n°2, ..., n°s).

Alors
$$B = L_r \cdots L_1 A C_1 \cdots C_s$$
En posant $Q = L_r \cdots L_1 \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P = C_1 \cdots C_s \in GL_n(\mathbb{K})$, on a donc $B = QAP$. D'où A et B sont équivalentes. $\square$

4.4 Résultats théorique sur le rang

Lemme 29.26

Si deux matrices sont équivalentes, alors elles ont le même rang.

Démonstration. Soit $A', A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ deux matrices équivalentes. Alors

$$A' = QAP$$

et donc, en notant $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_p$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$, en notant q, u, p les endomorphismes canoniquement associés à Q, A, P respectivement,

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}{}^{\mathcal{B}_n}(q \circ u \circ p)$$

Or, comme Q, P sont inversibles, q, p aussi. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\, A' &= \mathrm{rg}\,(q \circ u \circ p) && \text{par définition du rang de } A' \\ &= \mathrm{rg}\, u && \text{car } q, p \text{ sont des isomorphismes} \\ &= \mathrm{rg}\, A \end{aligned}$$

où, pour la deuxième égalité, on a utilisé la propriété 27.29 du chapitre 27 (Applications linéaires, partie A). □

Définition 29.27

On se place dans l'ensemble $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq r \leq \min(n, p)$, on pose

$$J_r := \begin{array}{c c} & \overbrace{\hphantom{1 \ \ddots \ 1}}^{r \text{ colonnes}} \\ r \text{ lignes} \left\{ \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \ddots \\ 1 \end{matrix}} \right. & \left(\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right) \end{array} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

La matrice J_r vérifie $\mathrm{rg}\, J_r = r$ (on le montrera dans la section suivante).

Propriété 29.28

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $r = \mathrm{rg}(A)$. Alors A est équivalente à J_r.
En particulier, étant donné $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r, il existe une base $\mathcal{B}_E$ de E et une base $\mathcal{B}_F$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) = J_r$.

Heuristique de la preuve. On fait des opérations élémentaires sur A pour arriver à une matrice J_R. Par opérations sur les lignes on peut mettre la matrice A sous forme échelonnée réduite et mettre tous ses pivots à 1. Par permutation de colonnes, on peut disposer tous les pivots le long de la "diagonale". Ainsi A est équivalente à une matrice de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & & \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & \boxed{1} & * & \cdots & * \\ & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \end{array} \right)$$

Ensuite, on peut faire des opérations sur les colonnes pour éliminer les étoiles restantes. On arrive donc à une matrice de la forme J_R avec $0 \leq R \leq \min(n,p)$. Comme A et J_R sont équivalentes, elles ont le même rang, ainsi $r = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} J_R = R$. D'où $R = r$ et A est équivalente à J_r. □

Corollaire 29.29

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors A, B sont équivalentes, si et seulement si A, B ont le même rang.

Démonstration. Sens direct : cela découle de la Proposition 29.26. Sens réciproque : si $r = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$, alors par ce qui précède A et B sont toutes deux équivalentes à J_r, donc A et B sont équivalentes par transitivité. □

4.5 Calcul pratique du rang

Méthode

Pour calculer le rang de A, on peut faire des opérations sur les lignes et/ou les colonnes pour se ramener à une matrice de la forme J_r, mais il y a diverses techniques pour ne pas avoir besoin d'aller jusque-là :

- Si on met la matrice A sous forme échelonnée, alors $\operatorname{rg} A$ est égal au nombre de pivots.
- Après opérations sur les lignes et/ou colonnes, on peut reconnaitre que les vecteurs colonnes engendrent un s.e.v. de dimension r : alors $\operatorname{rg} A = r$ (cf Lemme 29.30).
- Après opérations sur les lignes et/ou colonnes, on peut reconnaitre que les vecteurs lignes engendrent un s.e.v. de dimension r : alors $\operatorname{rg} A = r$ (cf Corollaire 29.32).

Lemme 29.30

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ une matrice dont on note $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_n$ les vecteurs colonnes qui la constituent :

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 & \cdots & \mathcal{C}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Le rang de A est égal à la dimension du s.e.v. engendré par les colonnes de A :. $\quad \operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_n)$.

Démonstration. Soit $u_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ le morphisme canoniquement associé à A. Alors en posant $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a par définition de u_A :

$$u_A(e_1) = \mathcal{C}_1 \qquad \cdots \qquad u_A(e_n) = \mathcal{C}_n$$

Alors, comme $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E,

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u_A \underset{\text{Lemme 27.12}}{=} \dim \operatorname{Vect}\left(u_A(e_1), \cdots, u_A(e_n)\right) = \dim\left(\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_n\right)$$

□

Exemple 14. La matrice J_r définie plus haut est de rang r. En effet :

$$\operatorname{rg} J_r =$$

Propriété 29.31

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Le rang de A est égal à celui de sa transposée : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top$.

Démonstration. Soit $r = \operatorname{rg} A$. Alors A est équivalente à une matrice $J_r \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$: il existe $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = QJ_rP$$

En passant à la transposée, on obtient

$$A^\top = P^\top J_r^\top Q^\top$$

Et comme P, Q sont inversibles, $P^\top, Q^\top$ aussi. Ainsi, $A^\top$ est équivalente à $J_r^\top$. Or, $J_r^\top$ est une matrice de forme

$$J_r^\top = \begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{1 \quad \ddots \quad 1}}^{r \text{ colonnes}} \\ r \text{ lignes} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & 1 & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right) \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et on montre que $\operatorname{rg} J_r^\top = r$. Par équivalence de matrices, $\operatorname{rg} A^\top = \operatorname{rg} J_r^\top = r = \operatorname{rg} A$. □

Corollaire 29.32

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ une matrice dont on note $L_1, \cdots, L_p$ les vecteurs colonnes qui la constituent :

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & L_1 & \cdots \\ \cdots & L_2 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & L_p & \cdots \end{pmatrix}$$

Le rang de A est égal à la dimension du s.e.v. engendré par les colonnes de A : $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(L_1, \cdots, L_p)$.

Démonstration. On a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top$. Or,

$$A^\top = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_1 & L_2 & \cdots & L_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

D'où $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(L_1, \cdots, L_p)$ par le Lemme 29.30. □

Exemple 15. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ a & b & a \end{pmatrix}$$

4.6 Matrices semblables

Définition 29.33 (Matrices semblables)

Soit $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A' est semblables à A s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A' = P^{-1}AP$$

Attention : la notion de matrices semblables ne concerne que les matrices carrées. On aurait pu intervertir P et P^{-1} dans la définition ci-dessus. En effet, A, A' sont semblables si et seulement s'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = QAQ^{-1}$: Il suffit en effet de poser $Q = P^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$.

Remarque. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et A, A' deux matrices qui représentent u dans des bases différentes (par exemple $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$). Alors A et A' sont semblables, cf Proposition 29.18.

Propriété 29.34

Si deux matrices sont semblables, alors elles sont équivalentes. En particulier, elles ont le même rang.

La réciproque est fausse : si A, B sont équivalentes, i.e. $B = Q^{-1}AP$, rien ne permet a priori de prendre $Q = P$ pour en déduire que A, B sont semblables.

Propriété 29.35

La relation “être semblable à” est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4.7 Trace d'une matrice

Définition 29.36 (Trace)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la trace de A par

$$\operatorname{Tr} A := a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \quad \in \mathbb{K}$$

Autrement dit, la trace de A est la somme des éléments diagonaux de A.

Exemple 16. $\operatorname{Tr} I_n = \ldots\ldots$ et $\operatorname{Tr} E_{ij} = \ldots\ldots.$

Propriété 29.37

L'application $\operatorname{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \operatorname{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{Tr} A + \mu \operatorname{Tr} B$$

Propriété 29.38

Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$$

Démonstration.

□

Propriété 29.39

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B$.

Démonstration. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Alors

$$\operatorname{Tr} B = \operatorname{Tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{Tr}((P^{-1}A)P) = \operatorname{Tr}(P(P^{-1}A)) = \operatorname{Tr}(I_nA) = \operatorname{Tr} A$$

□

En particulier, si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et que A, A' sont deux matrices qui représentent u dans des bases différentes, alors on a vu que A, A' sont semblables et donc $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A'$. Cela permet de justifier la définition suivante.

Définition 29.40

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit la trace de u, notée $\operatorname{Tr} u$, comme étant la trace de toute matrice qui représente u (la trace ne dépend pas de la base choisie).

Propriété 29.41

(On suppose E de dimension finie). Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Alors

$$\operatorname{Tr} p = \operatorname{rg} p = \dim(\operatorname{Im} p)$$

Démonstration. Soit F, G des s.e.v. de E tels que $p = p_{F//G}$. On a donc $E = F \oplus G$. On pose $r = \dim F$ et $n = \dim E$. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $F \oplus G = E$:

$$\mathcal{B} = (f_1, \cdots, f_r, g_{r+1}, \cdots, g_n) \qquad \text{avec } f_1, \cdots, f_r \in F \quad \text{et} \quad g_{r+1}, \cdots, g_n \in G$$

Or, on a $p|_F = \mathrm{id}_F$ et $p|_G = 0_{\mathcal{L}(G)}$. D'où $p(f_i) = f_i$ et $p(g_j) = 0$ pour tous indices $(i, j) \in [\![1, r]\!] \times [\![r+1, n]\!]$. Alors,

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = J_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

D'où $\operatorname{Tr} p = \operatorname{Tr} J_r = r$ et de plus $\operatorname{rg} p = \operatorname{rg} J_r = r$. D'où le résultat. □

Exemple 17. On reprend l'exemple 13 (sous la Proposition 29.18). On avait vu que

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -6 & -7 & -8 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

et que u était un projecteur. On a alors

$$\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u)\right) = 4 - 7 + 5 = 2$$

Donc u est de rang 2 : c'est un projecteur sur $\operatorname{Im} u$ qui est de dimension 2 (donc parallèlement à $\operatorname{Ker} u$ de dimension 1 par le théorème du rang). Cela correspond bien à ce qu'on a trouvé puisque

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$